Популярные лекции
ПО МАТЕМАТИКЕ

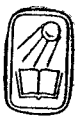
Б. А. РОЗЕНФЕЛЬД
и Н. Д. СЕРГЕЕВА

СТЕРЕОГРАФИЧЕСКАЯ ПРОЕКЦИЯ

ПОПУЛЯРНЫЕ ЛЕКЦИИ ПО МАТЕМАТИКЕ
ВЫПУСК 53

Б. А. РОЗЕНФЕЛЬД и Н. Д. СЕРГЕЕВА

СТЕРЕОГРАФИЧЕСКАЯ ПРОЕКЦИЯ



ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1973

513
Р 64
УДК 513

АННОТАЦИЯ

В брошюре рассказывается об одном часто применяемом виде проектирования сферы на плоскость, обладающем следующими замечательными свойствами: при этом проектировании углы между линиями на сфере изображаются равными им углами между линиями на плоскости, а круги на сфере изображаются кругами и прямыми на плоскости. В ней рассказывается также о применениях этого проектирования в астрономии и географии. В последнем разделе брошюры рассказывается об аналогичном проектировании плоскости Лобачевского на обычную плоскость.

Брошюра рассчитана на школьников старших классов и студентов младших курсов вузов.

© Издательство «Наука», 1973.

Р $\frac{0223—1824}{042(02)-73}$ 84-73

ВВЕДЕНИЕ

В математике часто пользуются проектированием фигур на плоскость. Для получения изображения фигуры при таком проектировании следует выбрать в пространстве точку, называемую центром проекции, соединить эту точку прямыми со всеми точками проектируемой фигуры и найти точки пересечения этих прямых с данной плоскостью; полученное изображение называется проекцией фигуры на данную плоскость.

Если проектируемая фигура — окружность, то ее проекция — линия пересечения плоскости с поверхностью, состоящей из прямых, проходящих через центр проекции и точки окружности. Такая поверхность называется круговым конусом, прямым, если перпендикуляр, опущенный из центра проекции на плоскость окружности, падает в ее центр, и наклонным в остальных случаях. Линии пересечения такой поверхности с плоскостью, вообще говоря, не являются окружностями, эти линии называются коническими сечениями и, если секущая плоскость не проходит через вершину конуса, бывают кривыми линиями трех видов: эллипсами, если эти линии замкнуты, параболами, если эти линии состоят из одной ветви, простирающейся в бесконечность, и гиперболами, если эти линии состоят из двух ветвей, простирающихся в бесконечность (в предположении, что прямые, соединяющие вершину конуса с данной окружностью, бесконечные);

окружности можно рассматривать как частный случай эллипсов.

Однако имеется одна замечательная проекция, при которой окружности всегда проектируются в виде окружностей или прямых линий. Такую проекцию мы получим, если будем рассматривать только такие окружности, которые лежат на некоторой сфере (такие окружности являются линиями пересечения этой сферы с плоскостями), за центр проекции примем одну из точек той же сферы, а за плоскость проекции примем плоскость, касающуюся сферы в диаметрально противоположной точке или любую параллельную ей плоскость, не проходящую через центр проекции. В том случае, когда плоскость окружности проходит через центр проекции, она проектируется в виде прямой линии, в остальных случаях окружность на сфере проектируется в виде окружности на указанной плоскости. Эта проекция обладает и другим неожиданным свойством — углы между линиями на сфере в этой проекции изображаются равными им углами между линиями на плоскости. Третьим важным свойством этой проекции является то, что при повороте сферы вокруг диаметра, проходящего через центр проекции, проекции на плоскость всех фигур на сфере поворачиваются вокруг точки пересечения этой плоскости с диаметром сферы, и притом на тот же угол.

Эта проекция, которую принято называть *стереографической проекцией*, часто применяется в различных областях математики, а также в астрономии и географии.

Настоящая книга посвящена доказательству указанных свойств стереографической проекции и изложению некоторых ее приложений. Книга состоит из восьми параграфов. В § 1 дается определение стереографической проекции и доказываются ее основные свойства. В § 2 устанавливается связь между стереографической проекцией и замечательным преобразованием плоскости

в себя, при котором окружности также переходят в окружности или прямые, а углы между линиями переходят в равные им углы, — это преобразование называется инверсией относительно окружности; здесь же устанавливается связь между стереографической проекцией и аналогичным преобразованием пространства — инверсией относительно сферы. В § 3 основные свойства стереографической проекции доказываются другим способом — с помощью координат. В § 4 устанавливается связь между стереографической проекцией и комплексными числами: в том случае, когда плоскость проекции рассматривается как плоскость комплексного переменного, с помощью стереографической проекции устанавливается изображение комплексных чисел точками сферы. Это изображение часто применяется в теории функций комплексного переменного, так как так называемая бесконечно удаленная точка плоскости комплексного переменного, не имеющая изображения на самой этой плоскости, на сфере изображается самим центром проекции. Здесь же рассматривается так называемая сферическая метрика на плоскости, при которой за расстояние между двумя точками плоскости принимается сферическое расстояние соответствующих им точек сферы; это расстояние наиболее просто записывается с помощью комплексных чисел. В § 5 показывается, какими преобразованиями плоскости изображаются при стереографической проекции вращения сферы; эти преобразования также особенно просто записываются с помощью комплексных чисел. В § 6 рассказывается об истории стереографической проекции, появившейся еще в древности и бывшей весьма популярной в средние века. В § 7 рассказывается о применениях стереографической проекции к астрономии — на этой проекции были основаны средневековые астролябии — и к географии, где эта проекция применяется для черчения мореходных карт. В § 8 дается определение плоскости Лобачевского и показывается, как с помощью своеобразной стереогра-

фической проекции можно получить изображение плоскости Лобачевского на обычной плоскости, при котором окружности и некоторые другие кривые плоскости Лобачевского изображаются окружностями или прямыми, а углы между линиями плоскости Лобачевского изображаются равными им углами.

Книга рассчитана на школьников старших классов и на студентов младших курсов. Более сложный материал, который может быть пропущен при первом чтении, набран петитом. В основу книги легли лекции, прочитанные авторами в разное время школьникам Москвы, Коломны и других городов.

§ 1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ И ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА СТЕРЕОГРАФИЧЕСКОЙ ПРОЕКЦИИ

Стереографической проекцией называется проекция сферы из одной из ее точек S на плоскость σ, касающуюся сферы в диаметрально противоположной точке S' (рис. 1). Свойства этой проекции не изменяются существенно при замене плоскости σ любой параллельной ей

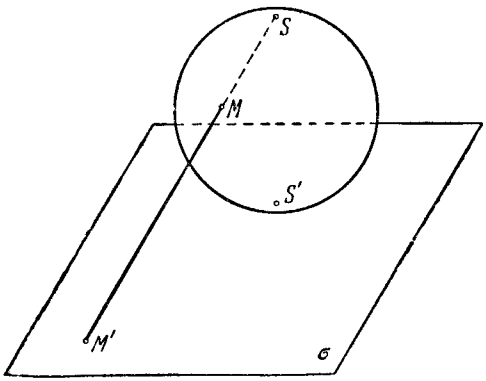


Рис. 1.

плоскостью, не проходящей через центр проекции; часто за эту плоскость принимают диаметральную плоскость сферы (если считать центр проекции и диаметрально противоположную точку сферы ее полюсами, эта плоскость является плоскостью экватора сферы).

Докажем следующие три свойства стереографической проекции.

А) *Окружности, лежащие на сфере, проектируются на плоскость σ в виде окружностей или, если окружности*

на сфере проходят через центр проекции, — в виде прямых.

Прежде чем переходить к доказательству этого свойства, заметим, что переход от любой точки M сферы к ее проекции M' на плоскости происходит в некоторой плоскости, проходящей через диаметр SS' сферы.

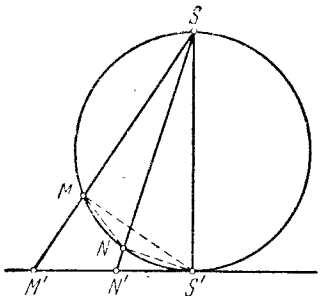


Рис. 2.

Поэтому рассмотрим сначала стереографическую проекцию окружности на прямую в одной из таких плоскостей (рис. 2) и докажем для этого случая следующую лемму.

Пусть при стереографической проекции окружности на прямую точки M и N окружности проектируются в точки M' и N' прямой. Тогда $\angle SMN = \angle SN'M'$, а $\angle SNM = \angle SM'N'$.

В самом деле, прямоугольные треугольники SMS' и $SS'M'$ с общим острым углом MSS' подобны, поэтому

$$\frac{SM}{SS'} = \frac{SS'}{SM'}, \text{ т. е. } SM \cdot SM' = (SS')^2.$$

Точно так же, рассматривая прямоугольники SNS' и $SS'N'$ с общим острым углом NSS', мы найдем, что $SN \cdot SN' = (SS')^2$. Сравнивая полученные равенства, находим, что

$$SM \cdot SM' = SN \cdot SN', \tag{1}$$

откуда

$$\frac{SM}{SN'} = \frac{SN}{SM'}. \tag{2}$$

Из пропорции (2) вытекает, что треугольники SMN и $SN'M'$ с общим острым углом MSN подобны, причем $\angle SMN$ и $\angle SNM$ треугольника SMN соответственно равны $\angle SN'M'$ и $\angle SM'N'$ треугольника $SN'M'$.

Докажем теперь свойство А) стереографической проекции. Если окружность на сфере проходит через точку S, то она лежит в плоскости, проходящей через эту точку, и ее проекцией из точки S на плоскость σ является линия пересечения обеих плоскостей, т. е. прямая линия. Если окружность на сфере не проходит че-

рез точку S, то можно считать, что плоскость, проходящая через прямую SS' и центр этой окружности, — плоскость рис. 2, а диаметр этой окружности, лежащий в этой плоскости, — отрезок MN. Тогда линии, проектирующие точки этой окружности, являются прямолинейными образующими наклонного кругового конуса с вершиной в точке S.

Если прямой круговой конус обладает только

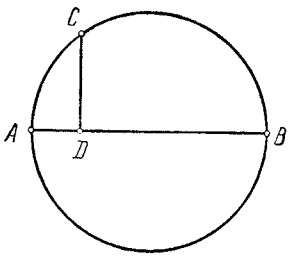


Рис. 3.

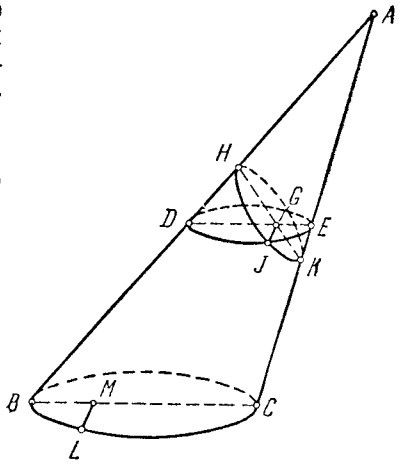


Рис. 4.

одним семейством круговых сечений — сечениями плоскостями, параллельными его основанию, то наклонный круговой конус обладает двумя такими семействами. Одно из этих семейств также образуют сечения плоскостями, параллельными его основанию. Для получения другого семейства круговых сечений наклонного кругового конуса вспомним, что если из произвольной точки C окружности опустить перпендикуляр CD на диаметр AB окружности (рис. 3), то имеет место равенство

$$AD \cdot DB = CD^2, \qquad (3)$$

и обратно, если для всякой точки C кривой и некоторой прямой AB имеет место равенство (3), эта кривая — окружность, или ее часть.

Рассмотрим теперь наклонный круговой конус с вершиной A и с основанием, диаметр которого — отрезок BC, причем мы будем предполагать, что прямая BC проходит через основание перпендикуляра, опущенного из вершины конуса на его основание (рис. 4). Пересечем конус плоскостью, перпендикулярной плоскости ABC и

пересекающей ее по такой прямой HK, что точки H и K лежат на поверхности конуса и $\angle AHK = \angle ACB$, а $\angle AKH = \angle ABC$. Эта плоскость пересечет поверхность конуса по кривой HJK. Покажем, что эта кривая HJK — окружность. Для этого рассмотрим произвольную точку J этой кривой и произвольную точку L окружности основания конуса и опустим из этих точек перпендикуляры JG и LM на плоскость ABC. Прямые JG и LM, являющиеся перпендикулярами к одной плоскости, параллельны между собой. Проведем через точку G прямую DGE, параллельную прямой BC, и плоскость, проходящую через прямые DE и JG. Так как прямая DE параллельна прямой BC, а прямая JG параллельна прямой LM, проведенная нами плоскость параллельна плоскости основания конуса и, следовательно, высекает из него круговое сечение. Но в силу свойства (3) для этого кругового сечения имеет место равенство

$$DG \cdot GE = JG^2. \tag{4}$$

С другой стороны, так как $\angle AHK = \angle ACB$, который в силу параллельности прямых DE и BC равен $\angle AED$, а $\angle AKH = \angle ABC$, который в силу параллельности тех же прямых равен $\angle ADE$, то $\angle HDG = \angle EKG$, а $\angle DHG = \angle KEG$. Поэтому треугольники EGK и HGD, имеющие равные углы при вершинах G, подобны.

В силу подобия этих треугольников имеет место пропорция

$$\frac{HG}{GD} = \frac{EG}{GK},$$

откуда

$$DG \cdot GE = HG \cdot GK,$$

т. е. в силу равенства (4)

$$HG \cdot GK = JG^2. \tag{5}$$

Так как равенство (5) также имеет вид (3) и это равенство имеет место для любой точки кривой HJK и прямой HK, кривая HJK является окружностью. Так как тем же свойством обладает сечение конуса любой плоскостью, параллельной плоскости HJK, мы получили второе семейство круговых сечений наклонного кругового конуса.

Так как треугольники $SM'N'$ и SNM на рис. 2 расположены так же, как треугольники ABC и AHK на рис. 4, то из равенства углов треугольников $SM'N'$ и SNM вытекает, что сечение наклонного кругового конуса (прямолинейными образующими которого являются прямые, проектирующие окружность с диаметром MN на сфере) плоскостью, касающейся сферы в точке S', является окружность с диаметром $M'N'$. Свойство А) доказано.

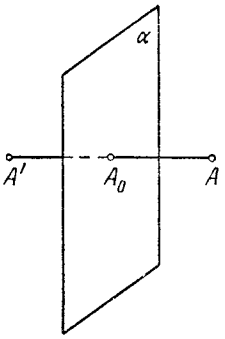


Рис. 5.

Наличие у наклонного кругового конуса двух семейств круговых сечений может быть доказано и другим способом, с помощью плоскости симметрии этого конуса. Говорят, что фигура симметрична относительно плоскости α (рис. 5), если для всякой точки A этой фигуры имеется другая точка A' той же фигуры, являющаяся зеркальным отражением относительно плоскости α, т. е. точка A' расположена на перпендикуляре, опущенном из точки A на плоскость α на том же расстоянии от плоскости α, что и точка A, но по другую сторону от плоскости α. В случае прямого кругового конуса плоскостью симметрии является любая плоскость, проходящая через его ось. Можно доказать, что одной из плоскостей симметрии наклонного кругового конуса, изображенного на рис. 4,

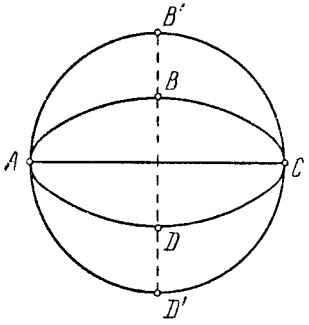


Рис. 6.

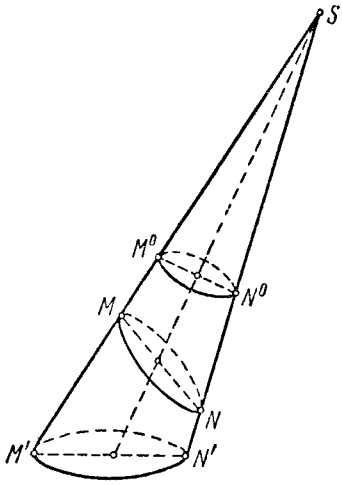


Рис. 7.

является плоскость ABC, проходящая через прямую, соединяющую вершину конуса с центром основания, и через перпендикуляр, опущенный из его вершины на плоскость основания. Эта плоскость пересекает конус по двум образующим. Биссектриса угла между полученными образующими называется осью наклонного конуса

(который мы мысленно считаем продолженным до бесконечности). Второй плоскостью симметрии наклонного конуса является плоскость, проходящая через ось конуса перпендикулярно первой плоскости. При отражении от первой плоскости все круговые сечения конуса переходят в себя, а при отражении от второй плоскости круговые сечения первого семейства переходят в круговые сечения второго семейства и наоборот. Наличие у наклонного кругового конуса двух взаимно перпендикулярных плоскостей симметрии тесно связано с тем, что сечение такого конуса плоскостью, перпендикулярной его оси, является кривой, обладающей двумя взаимно перпендикулярными осями симметрии — так называемым эллипсом, который может быть получен из окружности сжатием к одному из ее диаметров. На рис. 6 изображен эллипс $ABCD$, полученный сжатием окружности $AB'CD'$ к ее диаметру AC. На рис. 7 изображены два сечения наклонного кругового конуса с диаметром основания MN — круговое сечение с диаметром $M'N'$ и сечение, имеющее форму эллипса, одна из осей симметрии которого — отрезок M^0N^0.

Следует отметить, что всякая окружность или прямая на плоскости σ является проекцией некоторой окружности на сфере: всякая прямая является проекцией той окружности, которая высекается из сферы плоскостью, проходящей через эту прямую и центр проекции, а всякая окружность на плоскости σ является окружностью основания некоторого наклонного кругового конуса с вершиной в центре проекции. Применяя те же рассуждения, что при доказательстве свойства А), можно доказать, что линия, по которой поверхность этого конуса пересекается со сферой, является окружностью кругового сечения, принадлежащего к тому семейству круговых сечений конуса, которые не параллельны основанию. Вследствие этого всякая окружность на плоскости σ является проекцией той окружности на сфере, по которой сфера пересекается с конусом, определяемым окружностью на плоскости σ.

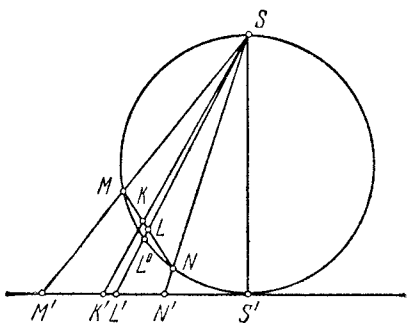


Рис. 8.

Заметим также, что при стереографической проекции центр окружности с диаметром MN не проектируется в центр окружности с диаметром $M'N'$. В самом деле, пусть L — середина диаметра MN, а L' — ее проекция на пло-

скость (рис. 8). Так как прямая SL не перпендикулярна хорде MN, она рассекает дугу MN на неравные части ML^0 и L^0N, причем $ML^0 > L^0N$. Поэтому $\angle MSL > \angle LSN$. Проведем прямую SK, составляющую с SM угол $\angle MSK$, равный $\angle LSN$, эта прямая пересекает прямую $M'N'$ в K'. В треугольниках $SM'K'$ и SNL углы S равны по построению, а углы M' и N равны по доказанному выше. Поэтому эти треугольники подобны и имеет место пропорция $\frac{SN}{SM'} = \frac{NL}{M'K'}$. С другой стороны, из подобия треугольников SMN и $SN'M'$ вытекает пропорция $\frac{SN}{SM'} = \frac{MN}{M'N'}$ и, следовательно, имеют место пропорции $\frac{NL}{M'K'} = \frac{MN}{M'N'}$ и $\frac{NL}{MN} = \frac{M'K'}{M'N'}$. Но $NL = \frac{1}{2} MN$, поэтому и $M'K' = \frac{1}{2} M'N'$, т. е. K' — середина диаметра $M'N'$. Поэтому центр K' круга с диаметром $M'N'$ — проекция не центра L круга с диаметром MN, а точки K этого диаметра, для которой $\angle MSK = \angle LSN$.

Докажем второе свойство стереографической проекции.

Б) *При стереографической проекции углы между кривыми, лежащими на сфере, изображаются равными им углами между кривыми, спроектированными на плоскость* σ.

Под углом между кривыми понимается угол между касательными к ним в точке пересечения. Проведем из точки M сферы две кривые. Пусть касательные к этим кривым в точке M пересекают плоскость π, касающуюся сферы в точке S, в точках K и L (рис. 9). Соединим точки K и L с точкой S. Тогда $KM = KS$ как две касательные к сфере, проведенные из одной точки, и $LM = LS$ по той же причине. Поэтому в треугольниках KLM и KLS с общей стороной KL все стороны соответственно равны, откуда вытекает равенство углов этих треугольников и, в частности, равенство $\angle KML$ и $\angle KSL$. Наши кривые спроектируются на плоскость σ в виде двух кривых, выходящих из точки M', угол между этими кривыми равен углу между касательными. Эти касательные $M'K'$ и $M'L'$ являются проекциями касательных MK и ML и, следовательно, являются пересечениями плоскостей SKM и

SLM с плоскостью проекции σ. Но плоскости SKM и SLM пересекают параллельную плоскости проекции σ плоскость π по прямым SK и SL, поэтому прямые $M'K'$ и $M'L'$ соответственно параллельны прямым SK и SL и $\angle K'M'L' = \angle KSL$, а так как $\angle KSL = \angle KML$, мы по-

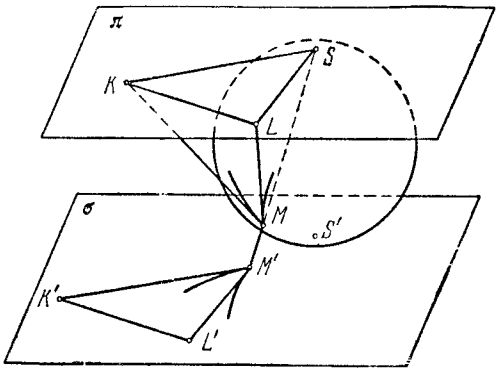


Рис. 9.

лучаем, что $\angle K'M'L' = \angle KML$. Свойство Б) доказано.

Третье свойство стереографической проекции состоит в следующем.

В) *При повороте сферы вокруг диаметра, проходящего через полюс, на плоскости σ происходит поворот вокруг точки ее касания со сферой на тот же угол.*

Это свойство вытекает непосредственно из того, что переход от всякой точки M к ее проекции M' на плоскости σ происходит в некоторой плоскости, проходящей через диаметр SS', и при повороте сферы на угол φ на тот же угол поворачивается линия пересечения этой плоскости с плоскостью проекции.

§ 2. СТЕРЕОГРАФИЧЕСКАЯ ПРОЕКЦИЯ И ИНВЕРСИЯ

Найдем, какими точками при стереографической проекции изображаются на плоскости σ диаметрально противоположные точки сферы. Пусть диаметрально противоположные точки сферы M и N проектируются при стереографической проекции в точки M' и N' плоскости

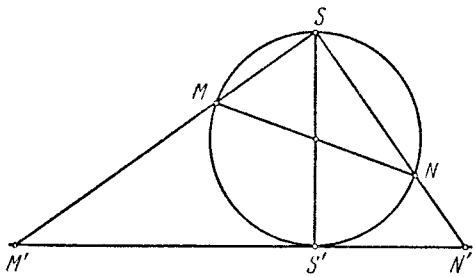


Рис. 10.

σ (рис. 10). Покажем, что если мы обозначим радиус сферы через R, то

$$S'M' \cdot S'N' = 4R^2. \qquad (6)$$

В самом деле, угол MSN, опирающийся на диаметр MN окружности, прямой, поэтому в треугольнике $M'SN'$ угол S также прямой. Так как отрезок SS' — высота прямоугольного треугольника $M'SN'$, то имеет место равенство

$$S'M' \cdot S'N' = (SS')^2.$$

Заменяя в этом равенстве SS' через $2R$, мы получим соотношение (6).

Если теперь M' — произвольная точка плоскости σ, отличная от точки S', мы можем поставить в соответствие точке M' некоторую точку N' плоскости следующим образом: соединим точку M' с S, найдем точку M пересечения прямой $M'S$ со сферой, найдем точку N сферы, диаметрально противоположную точке M, и спроектируем точку N на плоскость σ в виде точки N'. Мы получили преобразование плоскости, которое ставит в соответствие всякой точке M' плоскости, отличной от точки S', некоторую точку N' той же плоскости.

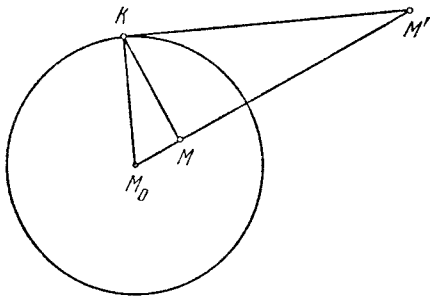


Рис. 11.

Покажем, что это преобразование тесно связано с известным преобразованием плоскости, называемым *инверсией* относительно окружности. Пусть на плоскости задана окружность с центром M_0 и радиусом R (рис. 11). *Инверсией* относительно этой окружности называется такое преобразование плоскости, при котором всякая точка M плоскости, отличная от M_0, переходит в такую точку M' на прямой M_0M по ту же сторону от M_0, что и M, что

$$M_0M \cdot M_0M' = R^2. \qquad (7)$$

При инверсии точки, находящиеся внутри окружности, переходят в точки, находящиеся вне окружности, и наоборот, а точки самой окружности переходят в себя [1]).

Рассмотренное нами преобразование, переводящее точки M' плоскости σ, отличные от точки S', в точки N', отличается от инверсии относительно окружности с центром S' и радиусом $2R$ тем, что точка N' находится на прямой $M'S'$ на расстоянии, определяемом соотношением (6), не по ту же сторону от точки S', что точка M', а по другую сторону. Это преобразование можно представить в виде последовательного выполнения (в любом порядке)

[1]) Более подробно с инверсией читатель может познакомиться по книге И. Я. Бакельмана «Инверсия» («Популярные лекции по математике», вып. 44, М., 1968).

указанной инверсии и отражения от точки S'. Отсюда следует, что инверсию относительно любой окружности плоскости с центром M_0 и радиусом R можно представить как результат последовательного выполнения четырех преобразований: преобразования, обратного стереографической проекции относительно сферы радиуса $R/2$, касающейся плоскости в точке M_0, при которой точка M плоскости σ переходит в некоторую точку сферы, перехода от этой сферы к диаметрально противоположной ей точке той же сферы, стереографической проекции полученной точки сферы на плоскость σ и отражения полученной точки плоскости σ от точки M_0.

Так как в силу свойства А) стереографической проекции окружности на сфере проектируются на плоскость σ в виде окружностей и прямых и, обратно, всякая окружность или прямая на плоскости σ является проекцией некоторой окружности на сфере, а при переходе к диаметрально противоположным точкам сферы (т. е. при отражении сферы от ее центра) окружности на сфере переходят в окружности и при отражении плоскости от точки окружности и прямые переходят в окружности и прямые, из нашего представления инверсии в виде результата последовательного выполнения указанных четырех преобразований следует, что инверсия обладает свойством

А′) *Окружности и прямые переходят при инверсии в окружности или прямые.*

Нетрудно убедиться, что окружности и прямые переходят при инверсии в прямые тогда и только тогда, когда они проходят через точку M_0.

Точно так же в силу свойства Б) стереографической проекции углы между кривыми на сфере изображаются равными им углами между кривыми на плоскости σ. При отражении сферы от ее центра и при отражении плоскости от точки углы между кривыми на сфере или на плоскости также изображаются равными им углами между кривыми на сфере или на плоскости. Таким образом, из нашего представления инверсии в виде результата последовательного выполнения четырех преобразований следует, что инверсия обладает также свойством

Б′) *При инверсии углы между кривыми переходят в равные им углы между преобразованными кривыми.*

Результат последовательного выполнения инверсии относительно окружности с центром M_0 и радиусом R

и отражения плоскости от точки по причинам, о которых мы скажем ниже (в § 4), называют *инверсией* относительно мнимой окружности с центром M_0 и мнимым радиусом iR.

Заметим, что совершенно аналогично инверсии относительно окружности на плоскости можно определить *инверсию относительно сферы* в пространстве с центром M_0 и радиусом R, т. е. преобразование пространства,

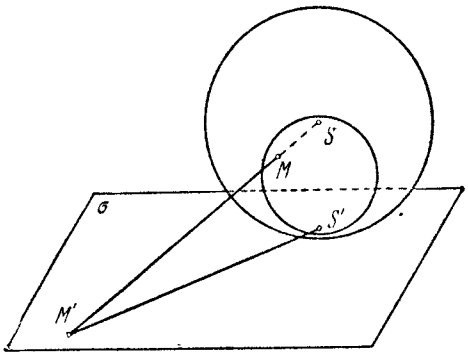


Рис. 12.

при котором всякая точка M пространства, отличная от M_0, переходит в такую точку M' на прямой M_0M по ту же сторону от M_0, что и M, что выполняется соотношение (7). Можно доказать, что инверсия относительно сферы в пространстве обладает теми же свойствами А′) и Б′), что и инверсия относительно окружности на плоскости и, кроме того, аналогичным свойству А′) свойством.

А″) *Сферы и плоскости переходят при инверсии в сферы и плоскости.*

Нетрудно убедиться, что окружности и прямые переходят при инверсии относительно сферы в прямые, а сферы и плоскости переходят при этой инверсии в плоскости тогда и только тогда, когда они проходят через точку M_0.

Между стереографической проекцией и инверсией относительно сферы имеется примечательная связь. Эта связь состоит в том, что *если мы произведем инверсию относительно сферы с центром S и радиусом SS′, то сфера с диаметром SS′ перейдет в плоскость σ, касающуюся обеих сфер в точке S′, и получающееся при этом*

отображение сферы на плоскость σ *совпадает со стереографической проекцией сферы на плоскость* σ (рис. 12). В самом деле, в § 1 мы нашли, что для всякой точки M сферы, проектируемой на плоскость σ, и соответствующей ей точки M' плоскости σ имеет место соотношение

$$SM \cdot SM' = (SS')^2,$$

показывающее, что точка M' плоскости получается из точки M инверсией относительно сферы с центром S и радиусом SS'.

§ 3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СВОЙСТВ СТЕРЕОГРАФИЧЕСКОЙ ПРОЕКЦИИ С ПОМОЩЬЮ КООРДИНАТ

Для тех читателей, которые владеют методом координат, приведем доказательство свойств стереографической проекции с помощью координат (содержание этого параграфа может быть пропущено без ущерба для понимания дальнейшего). Мы будем пользоваться в пространстве прямоугольными координатами X, Y, Z. Напомним, что в этих координатах расстояние d между точкой M_1 с координатами X_1, Y_1, Z_1 и точкой M_2 с координатами X_2, Y_2, Z_2, которые мы будем обозначать через $M_1(X_1, Y_1, Z_1)$ и $M_2(X_2, Y_2, Z_2)$, равно

$$d = \sqrt{(X_2 - X_1)^2 + (Y_2 - Y_1)^2 + (Z_2 - Z_1)^2}, \tag{8}$$

а угол φ между направленными отрезками (векторами) $\overrightarrow{OM_1}$ и $\overrightarrow{OM_2}$, выходящими из начала координат O, определяется по формуле

$$\cos\varphi = \frac{X_1X_2 + Y_1Y_2 + Z_1Z_2}{\sqrt{X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2}\sqrt{X_2^2 + Y_2^2 + Z_2^2}}. \tag{9}$$

Рассмотрим стереографическую проекцию сферы с центром в начале координат O и радиусом 1 из центра проекции S, лежащего на оси OZ, на плоскость σ, касательную к сфере в диаметрально противоположной точке. В этом случае уравнение сферы имеет вид

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = 1, \tag{10}$$

точка S имеет координаты 0, 0, 1, а плоскость σ проекции — плоскость $Z = -1$. Пусть точка $M(X, Y, Z)$ сферы стереографически проектируется в точку $M'(x, y, -1)$ плоскости. Найдем связь между координатами x, y точки M' и координатами X, Y, Z точки M. Так как точки S, M и M' лежат на одной прямой, то векторы $\overrightarrow{SM}$ и $\overrightarrow{SM'}$ направлены по одной прямой и, следовательно, разности координат X, Y, $Z-1$ точек S, M и x, y, -2 точек S, M'

пропорциональны:

$$\frac{X}{x}=\frac{Y}{y}=\frac{1-Z}{2}=k.$$

Поэтому

$$X=kx, \qquad Y=ky, \qquad Z=1-2k.$$

Так как координаты X, Y, Z удовлетворяют уравнению (10) сферы, мы находим, что

$$k^2(x^2+y^2)+(1-2k)^2=1,$$

или

$$k^2(x^2+y^2+4)-4k=0. \tag{11}$$

Значения k, удовлетворяющие условию (11), соответствуют точкам пересечения прямой SM со сферой: значение $k=0$ соответствует самой точке S, а значение

$$k=\frac{4}{x^2+y^2+4}$$

— точке M. Поэтому координаты точки M, соответствующей точке M', равны

$$X=\frac{4x}{x^2+y^2+4}, \quad Y=\frac{4y}{x^2+y^2+4}, \quad Z=\frac{x^2+y^2-4}{x^2+y^2+4}. \tag{12}$$

Докажем теперь с помощью координат свойства стереографической проекции.

А) Так как окружности на сфере высекаются из нее плоскостями, то координаты точек окружностей на сфере связаны теми же условиями, что и координаты точек плоскостей, т. е. уравнениями плоскостей. Рассмотрим плоскость, определяемую уравнением

$$AX+BY+CZ+D=0, \tag{13}$$

и найдем геометрическое место точек плоскости, соответствующих точкам пересечения плоскости (13) со сферой (10). Для этого подставим в уравнение (13) значения X, Y, Z из формул (12). Мы получим, что координаты x, y точек этого геометрического места удовлетворяют условию

$$A\frac{4x}{x^2+y^2+4}+B\frac{4y}{x^2+y^2+4}+C\frac{x^2+y^2-4}{x^2+y^2+4}+D=0,$$

что можно переписать в виде

$$4Ax+4By+C(x^2+y^2-4)+D(x^2+y^2+4)=0,$$

или

$$(C+D)(x^2+y^2)+4Ax+4By+4(D-C)=0. \tag{14}$$

Подставляя в уравнение (13) координаты точки S, мы получим условие $C+D=0$, являющееся необходимым и достаточным условием того, что плоскость (13) проходит через точку S. Поэтому если плоскость (13) не проходит через точку S, то $C+D\neq 0$ и уравнение (14) является уравнением окружности. Если плоскость

(13) проходит через точку S, то $C+D=0$ и уравнение (14) является уравнением прямой.

Б) Доказательство этого свойства с помощью координат требует знакомства с дифференциальным исчислением. Угол между касательными к двум кривым на сфере равен углу между касательными к этим кривым в точке их пересечения и, следовательно, углу между векторами, направленными по этим касательным. Но если мы будем называть координаты точки M также координатами вектора $\overline{OM}$, то за вектор, направленный по касательной к кривой в точке $M(X, Y, Z)$, можно принять вектор, координатами которого являются дифференциалы dX, dY, dZ координат точки M. Если мы обозначим такой вектор, направленный по касательной к одной из двух кривых на сфере, через $\{dX, dY, dZ\}$, то вектор, направленный по касательной к другой из этих кривых, мы обозначим $\{\delta X, \delta Y, \delta Z\}$. В силу (9) угол Φ между этими векторами и, следовательно, между кривыми определяется по формуле

$$\cos\Phi=\frac{dX\,\delta X+dY\,\delta Y+dZ\,\delta Z}{\sqrt{dX^2+dY^2+dZ^2}\,\sqrt{\delta X^2+\delta Y^2+\delta Z^2}}. \tag{15}$$

Угол φ между двумя кривыми на плоскости, получающимися проектированием этих двух кривых на сфере, равен углу между аналогичными векторами $\{dx, dy\}$ и $\{\delta x, \delta y\}$, т. е.

$$\cos\varphi=\frac{dx\,\delta x+dy\,\delta y}{\sqrt{dx^2+dy^2}\,\sqrt{\delta x^2+\delta y^2}}. \tag{16}$$

Дифференциалы dX, dY, dZ мы найдем, дифференцируя формулы (12). Эти дифференциалы равны

$$dX=\frac{(x^2+y^2+4)\cdot 4dx-2(x\,dx+y\,dy)\cdot 4x}{(x^2+y^2+4)^2}=$$
$$=\frac{4(y^2-x^2+4)\,dx-8xy\,dy}{(x^2+y^2+4)^2},$$
$$dY=\frac{(x^2+y^2+4)\cdot 4\,dy-2(x\,dx+y\,dy)\cdot 4y}{(x^2+y^2+4)^2}=$$
$$=\frac{4(x^2-y^2+4)\,dy-8xy\,dx}{(x^2+y^2+4)^2},$$
$$dZ=\frac{(x^2+y^2+4)\cdot 2(x\,dx+y\,dy)-(x^2+y^2-4)\cdot 2(x\,dx+y\,dy)}{(x^2+y^2+4)^2}=$$
$$=\frac{16(x\,dx+y\,dy)}{(x^2+y^2+4)^2}.$$

Подставляя эти дифференциалы в выражения числителя и множителей знаменателя формулы (15), мы получим

$$dX\,\delta X+dY\,\delta Y+dZ\,\delta Z=\frac{16(dx\,\delta x+dy\,\delta y)}{(x^2+y^2+4)^2},$$
$$\sqrt{dX^2+dY^2+dZ^2}=\frac{4\sqrt{dx^2+dy^2}}{x^2+y^2+4},$$
$$\sqrt{\delta X^2+\delta Y^2+\delta Z^2}=\frac{4\sqrt{\delta x^2+\delta y^2}}{x^2+y^2+4}.$$

Поэтому

$$\cos\Phi = \frac{dX\,\delta X + dY\,\delta Y + dZ\,\delta Z}{\sqrt{dX^2 + dY^2 + dZ^2}\,\sqrt{\delta X^2 + \delta Y^2 + \delta Z^2}} =$$

$$= \frac{dx\,\delta x + dy\,\delta y}{\sqrt{dx^2 + dy^2}\,\sqrt{\delta x^2 + \delta y^2}} = \cos\varphi, \qquad (17)$$

и, следовательно, угол Φ между кривыми на сфере равен углу φ между соответственными кривыми на плоскости σ.

В) Поворот сферы вокруг оси OZ можно записать в виде

$$\left.\begin{aligned} X' &= X\cos\Phi - Y\sin\Phi, \\ Y' &= X\sin\Phi + Y\cos\Phi, \\ Z' &= Z, \end{aligned}\right\} \qquad (18)$$

а поворот плоскости вокруг начала координат имеет вид

$$\left.\begin{aligned} x' &= x\cos\varphi - y\sin\varphi, \\ y' &= x\sin\varphi + y\cos\varphi. \end{aligned}\right\} \qquad (19)$$

Координаты точки сферы, соответствующей точке плоскости с координатами x', y', -1, в силу легко проверяемого соотношении

$$x'^2 + y'^2 = x^2 + y^2$$

имеют вид

$$X' = \frac{4(x\cos\varphi - y\sin\varphi)}{x^2 + y^2 + 4} = X\cos\varphi - Y\sin\varphi,$$

$$Y' = \frac{4(x\sin\varphi + y\cos\varphi)}{x^2 + y^2 + 4} = X\sin\varphi + Y\cos\varphi,$$

$$Z' = \frac{x^2 + y^2 - 4}{x^2 + y^2 + 4} = Z,$$

т. е. совпадают с координатами (18) при $\Phi = \varphi$, откуда вытекает наше утверждение.

§ 4. СФЕРИЧЕСКАЯ МЕТРИКА НА ПЛОСКОСТИ. ПРИМЕНЕНИЕ КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ

Помимо обычного расстояния между точками на плоскости, на ней можно определить и другие расстояния, определяемые по совсем другим законам. Законы, определяющие расстояния между точками, называются *метриками* плоскости (от греческого слова «метрео» — «измеряю»).

В частности, проектируя сферу на плоскость, мы можем перенести на плоскость метрику сферы, если будем считать за расстояние между точками M' и N' плоскости расстояние между соответственными точками M и N сферы, измеренное по большой окружности сферы — так называемое сферическое расстояние; в случае когда радиус сферы равен r, сферическое расстояние между точками M и N равно углу MON между радиусами OM и ON сферы, умноженному на r, а при $r = 1$ оно равно самому углу MON.

Стереографическая проекция устанавливает взаимно однозначное соответствие между точками плоскости σ и точками сферы, из которой исключена точка S.

Для того чтобы получить взаимно однозначное соответствие плоскости σ со всей сферой, следует дополнить плоскость σ одной точкой, которую мы будем считать соответствующей точке S сферы. Так как при приближении точки сферы к точке S соответственная точка плоскости удаляется в бесконечность, добавляемая нами точка называется *бесконечно удаленной точкой*; будем обозначать эту точку символом ∞.

Сферическое расстояние ω между точками M и N сферы (10) единичного радиуса с координатами X, Y, Z и X', Y', Z' равно углу между радиусами OM и ON, т. е.

$$\cos\omega = XX' + YY' + ZZ'. \tag{20}$$

Заменяя координаты X, Y, Z их выражениями (12) через координаты x, y точки плоскости, а координаты X', Y', Z' — аналогичным выражением через x', y', мы получим, что расстояние ω выражается через координаты x, y и x', y' по формуле

$$\cos\omega = \frac{16(xx' + yy') + (x^2 + y^2 - 4)(x'^2 + y'^2 - 4)}{(x^2 + y^2 + 4)(x'^2 + y'^2 + 4)} \tag{21}$$

или

$$\cos^2\frac{\omega}{2}=\frac{1+\cos\omega}{2}=$$

$$=\frac{(x^2+y^2+4)(x'^2+y'^2+4)+16(xx'+yy')+}{2(x^2+y^2+4)(x'^2+y'^2+4)}+\frac{+(x^2+y^2-4)(x'^2+y'^2-4)}{2(x^2+y^2+4)(x'^2+y'^2+4)},$$

т. е.

$$\cos^2\frac{\omega}{2}=\frac{(x^2+y^2)(x'^2+y'^2)+8(xx'+yy')+16}{(x^2+y^2+4)(x'^2+y'^2+4)}. \tag{22}$$

Формулам (12) и (22) можно придать более простой вид, если рассматривать плоскость σ, дополненную бесконечно удаленной точкой ∞ как плоскость комплексного переменного, т. е. поставим в соответствие каждой точке $M(x, y)$ плоскости σ комплексное число

$$z=x+iy.$$

Заменяя x и y через $\frac{z+\bar{z}}{2}$ и $\frac{z-\bar{z}}{2i}$, где $\bar{z}=x-iy$, мы можем переписать формулы (12) в виде

$$\left.\begin{aligned} X&=\frac{2(z+\bar{z})}{z\bar{z}+4},\\ Y&=\frac{2(z-\bar{z})}{i(z\bar{z}+4)},\\ Z&=\frac{z\bar{z}-4}{z\bar{z}+4}, \end{aligned}\right\} \tag{23}$$

а формулу (22) — в виде

$$\cos^2\frac{\omega}{2}=\frac{(z\bar{z}'+4)(z'\bar{z}+4)}{(z\bar{z}+4)(z'\bar{z}'+4)}. \tag{24}$$

Найдем, какими точками плоскости σ изображаются при стереографической проекции диаметрально противоположные точки сферы. В случае, если точки M и M' сферы (10) диаметрально противоположны, сферическое расстояние ω между ними равно π и $\cos\frac{\omega}{2}=\cos\frac{\pi}{2}=0$. Поэтому в этом случае числитель выражения (24), равный $|z\bar{z}'+4|^2$, равен 0, т. е.

$$z\bar{z}'+4=0,$$

и, следовательно,

$$z'=-\frac{4}{\bar{z}}. \tag{25}$$

Запишем теперь с помощью комплексных чисел инверсию относительно окружности с центром M_0 и радиусом R. Если точки M_0, M и M' определяются комплексными числами z_0, z и z', то условие (7) можно записать в виде

$$|z-z_0|\cdot|z'-z_0|=R^2,$$

и так как векторы $\overrightarrow{M_0M}$ и $\overrightarrow{M_0M'}$ направлены по одной прямой и отличаются положительным множителем, то же соотношение имеет место и для изображающих их комплексных чисел $z - z_0$ и $z' - z_0$, т. е.

$$z' - z_0 = \frac{|z' - z_0|}{|z - z_0|}(z - z_0) = \frac{R^2}{|z - z_0|^2}(z - z_0) =$$

$$= \frac{R^2}{(z - z_0)(\bar{z} - \bar{z}_0)}(z - z_0) = \frac{R^2}{\bar{z} - \bar{z}_0},$$

т. е. инверсия, переводящая точки M в точки M', связанные с ними условием (7), может быть записана с помощью комплексных чисел в виде

$$z' - z_0 = \frac{R^2}{\bar{z} - \bar{z}_0}. \tag{26}$$

Поэтому преобразование (25) состоит из инверсии относительно окружности

$$z\bar{z} = 4 \tag{27}$$

с центром O и радиусом 2 и отражения $z' = -z$.

Так как преобразование (25) можно рассматривать как преобразование (26), где $z_0 = 0$, а $R^2 = -4$, это преобразование называют *инверсией относительно мнимой окружности*

$$z\bar{z} = -4 \tag{28}$$

с центром O и мнимым радиусом $2i$.

Заметим, что окружность (27) является изображением большой окружности на сфере, высекаемой из нее диаметральной плоскостью, параллельной плоскости проекции, т. е. экватора сферы, если считать точки S и S' ее полюсами. Так как каждые две большие окружности сферы пересекаются в диаметрально противоположных точках, а диаметрально противоположные точки экватора сферы изображаются на плоскости диаметрально противоположными точками окружности (27), то большие окружности сферы изображаются на плоскости такими окружностями или прямыми, которые пересекают окружность (27) в диаметрально противоположных точках.

Как известно, сумма углов сферического треугольника, т. е. треугольника на сфере, сторонами которого являются дуги больших окружностей, всегда больше π (можно доказать, что площадь сферического треугольника равна произведению избытка его суммы углов над π на квадрат радиуса сферы). Теперь мы можем убедиться в этом совершенно наглядно: изобразим сферический треугольник ABC в стереографической проекции (на рис. 13 сторона AB этого треугольника изображается отрезком диаметра окружности (27), а стороны AC и BC — дугами окружностей, пересекающих эту окружность в ее диаметрально противоположных точках). Тогда в силу свойства Б) стереографической проекции углы треугольника ABC изображаются на плоскости в натуральную величину. Соединим теперь вершины треугольника на плоскости прямыми линиями. Сумма углов полученного прямолинейного тре-

угольника на плоскости равна π, и на рис. 13 наглядно видно, что сумма углов сферического треугольника ABC больше суммы углов построенного нами прямолинейного треугольника, т. е. больше π.

Окружность с центром M_0 и радиусом R может быть охарактеризована уравнением

$$|z - z_0| = R$$

или

$$(z - z_0)(\bar{z} - \bar{z}_0) = R^2. \qquad (29)$$

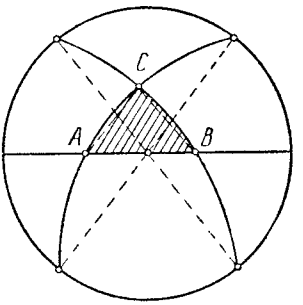


Рис. 13.

Приведем доказательства свойств А′) и Б′) инверсии относительно окружности с помощью комплексных чисел. Для этого рассмотрим инверсию

$$z' = \frac{r^2}{\bar{z}} \qquad (30)$$

относительно окружности

$$z\bar{z} = r^2 \qquad (31)$$

с центром в точке 0. Для доказательства свойства А′) следует записать уравнение (29) в виде

$$Az\bar{z} + B\bar{z} + \bar{B}z + C = 0 \qquad (32)$$

(умножив обе части уравнения (29) на A и положив $B = -Az_0$, $C = A(z_0\bar{z}_0 - R^2)$) и заменить в нем z его выражением через z' из (30). Получим

$$\frac{Ar^4}{z'\bar{z}'} + \frac{Br^2}{z'} + \frac{\bar{B}r^2}{\bar{z}'} + C = 0,$$

т. е.

$$Cz'\bar{z}' + BR^2\bar{z}' + \bar{B}R^2z' + AR^4 = 0. \qquad (33)$$

Случаю прохождения окружности или прямой через точку 0 соответствует $C = 0$.

Свойство Б′) можно доказать совершенно аналогично приведенному нами в § 3 доказательству свойства Б) с помощью координат. Свойство Б′) вытекает также из того, что инверсия (26) является результатом последовательного выполнения преобразования $z' = \bar{z}$ и преобразования

$$z'' - z_0 = \frac{R^2}{z' - z_0}. \qquad (34)$$

Но преобразование $z' = \bar{z}$ является отражением от вещественной оси и при нем всякий угол переходит в равный ему угол. Что касается преобразования (34), равносильного функции

$$w = \frac{R^2}{z - z_0} + z_0, \qquad (35)$$

то тот, кто знаком с дифференциальным исчислением в области функций комплексного переменного, знает, что функция (35) обладает производной

$$\frac{dw}{dz} = -\frac{R^2}{(z - z_0)^2};$$

и если мы обозначим эту производную через k, то дифференциалы dz и dw связаны соотношением

$$dw = k\,dz. \tag{36}$$

Поэтому если из точки $M(z)$ выходят две кривые, дифференциалы вдоль которых равны dz и δz, то эти кривые переходят при инверсии в две кривые, выходящие из точки $M'(w)$, дифференциалы вдоль которых равны $dw = k\,dz$, $\delta w = k\,\delta z$. Но преобразование

$$w = az \tag{37}$$

на плоскости комплексного переменного при $|a| = 1$, т. е. при $a = \cos\varphi + i\sin\varphi$, является поворотом на угол φ (в этом случае преобразование (37) в координатах имеет вид (19), при $a = \bar{a} = r$ это преобразование является гомотетией с коэффициентом r, а в общем случае состоит из поворота и гомотетии; поэтому, подвергая dz и δz преобразованию (37) при $a = k$, мы получим преобразование, не изменяющее углов, и, следовательно, угол между дифференциалами dw и δw равен углу между дифференциалами dz и δz.

Заметим, что инверсия относительно окружности (32) может быть записана в виде

$$z' = \frac{B\bar{z} + C}{A\bar{z} + B}. \tag{38}$$

§ 5. ИЗОБРАЖЕНИЕ ВРАЩЕНИЙ СФЕРЫ НА ПЛОСКОСТИ

В силу свойства B) стереографической проекции поворот сферы вокруг диаметра SS' изображается на плоскости σ поворотом (19), который, как мы видели, можно записать с помощью комплексных чисел в виде (37) при $a = \cos\varphi + i\sin\varphi$.

Найдем, каким преобразованием плоскости изображается произвольное вращение сферы. Так как при произвольном вращении сферы окружности на ней переходят в окружности, а в силу свойства A) стереографической проекции они изображаются на плоскости окружностями или прямыми, вращения сферы изображаются на расширенной плоскости комплексного переменного взаимно однозначными преобразованиями этой плоскости, переводящими окружности в окружности или прямые.

К таким преобразованиям плоскости относятся преобразования (37) и более общие линейные преобразования

$$w = az + b, \tag{39}$$

состоящие из преобразований (31) и переносов

$$w = z + b,$$

а также отражение $w = \bar{z}$ и более общие преобразования

$$w = a\bar{z} + b, \tag{40}$$

состоящие из линейных преобразований (39) и отражения $w = \bar{w}$. К этим преобразованиям относятся также инверсии относительно окружностей, преобразования (35) и наиболее общие дробно-линейные преобразования

$$w = \frac{az + b}{cz + d} \tag{41}$$

и

$$w = \frac{a\bar{z} + b}{c\bar{z} + d}, \tag{42}$$

состоящие из линейных преобразований (39) и (40) и инверсий или преобразований (35): тот факт, что преобразование (41) со-

стоит из указанных преобразований, видно из того, что его можно представить в виде

$$w = \frac{\frac{a}{c}cz + \frac{a}{c}d - \frac{a}{c}d + b}{cz + d} = \frac{a}{c} + \frac{bc - ad}{c(cz + d)},$$

а заменяя здесь z на $\bar{z}$, мы получим такое же представление преобразования (42).

Можно показать, что и, обратно, всякое взаимно однозначное преобразование плоскости комплексного переменного, дополненной точкой ∞, при котором окружности переходят в окружности или прямые, имеет вид (41) или (42). В самом деле, пусть наше преобразование T переводит точку ∞ в точку S. Рассмотрим инверсию J относительно окружности с центром S. Тогда преобразование U, состоящее из этих двух преобразований, переводит точку ∞ в себя и, значит, переводит прямые в прямые. Будем считать известным, что всякое взаимно однозначное преобразование плоскости, переводящее прямые в прямые, — такие преобразования называются *аффинными* — может быть записано в виде

$$\left.\begin{aligned} x' &= Ax + By + E, \\ y' &= Cx + Dy + F. \end{aligned}\right\} \tag{43}$$

Так как преобразование U, кроме того, переводит окружности в окружности, оно является подобием, т. е. состоит из движения и гомотетии, и, следовательно, может быть записано на плоскости комплексного переменного в виде (39) или (40). Поэтому преобразование T, состоящее из преобразования U и инверсии J, состоит из преобразования (39) или (40) и инверсии (38) и, следовательно, имеет вид (41) или (42).

Поэтому вращение сферы изображается при стереографической проекции сферы на плоскость преобразованием вида (41) или (42). Так как при вращении сферы диаметрально противоположные точки сферы всегда переходят в такие же точки, а при стереографической проекции эти точки изображаются точками, связанными соотношением (25), вращения сферы изображаются на плоскости такими преобразованиями (41) или (42), которые перестановочны с преобразованием (25), т. е. результаты выполнения этих преобразований в различном порядке совпадают. Так как результаты выполнения этих преобразований в различном порядке имеют вид

$$\frac{-\frac{4a}{\bar{z}} + b}{-\frac{4c}{\bar{z}} + d} = \frac{-4a + b\bar{z}}{-4c + d\bar{z}}, \qquad -\frac{4}{\frac{\bar{a}\bar{z} + \bar{b}}{\bar{c}\bar{z} + \bar{d}}} = \frac{-4\bar{c}\bar{z} - 4\bar{d}}{\bar{a}\bar{z} + \bar{b}},$$

то, сравнивая свободные члены и коэффициенты при $\bar{z}$ в числителях и знаменателях этих дробей, мы получаем соотношения

$$d = \bar{a}, \qquad c = -\frac{1}{4}\bar{b}. \tag{44}$$

Те же соотношения (44) мы получим, выполняя в различном порядке преобразования (42) и (25) и сравнивая свободные члены

и коэффициенты при z в полученных дробях. Поэтому вращения сферы изображаются на плоскости преобразованиями

$$z' = \frac{az + b}{-\frac{1}{4}\bar{b}z + \bar{a}} \tag{45}$$

и

$$z' = \frac{a\bar{z} + b}{-\frac{1}{4}\bar{b}\bar{z} + \bar{a}}. \tag{46}$$

Повороту вокруг диаметра SS' соответствует преобразование (45), при котором из $z = 0$ вытекает $z' = 0$. В этом случае $b = 0$ и преобразование (45) принимает вид

$$z' = \frac{a}{\bar{a}} z = (\cos\varphi + i \sin\varphi) z.$$

§ 6. ИСТОРИЯ СТЕРЕОГРАФИЧЕСКОЙ ПРОЕКЦИИ

Первое дошедшее до нас свидетельство о стереографической проекции — «Планисферий» известного александрийского ученого Клавдия Птолемея (II век н. э.). «Планисферий» был посвящен инструменту для определения координат звезд на небесной сфере, так называемой астролябии, в которой применяется стереографическая проекция (о том, как применялась стереографическая проекция в этом инструменте, мы будем говорить в § 7). В том тексте «Планисферия», который сохранился до нашего времени, используются свойства А), Б) и В) стереографической проекции, но без доказательств. Первое дошедшее до нас изложение теории стереографической проекции с полным доказательством свойства А) принадлежит среднеазиатскому ученому IX века Ахмаду ал-Фергани, уроженцу Ферганы, работавшему в Багдаде. Ал-Фергани посвятил этой теории I главу своей «Книги о построении астролябии», русский перевод Н. Д. Сергеевой этой книги вскоре будет опубликован в Ташкенте вместе с русским переводом знаменитой книги ал-Фергани «Элементы астрономии» в сборнике астрономических трактатов ал-Фергани. Позднейшие ученые Востока указывали, что книга ал-Фергани об астролябии является одним из лучших изложений теории этого инструмента, которая (теория инструмента), по-видимому, была известна Птолемею, но уже отсутствовала в тексте «Планисферия», которым располагали ученые средних веков.

В книге ал-Фергани была доказана лемма, которую мы привели в начале § 1, далее было дано доказательство

свойства А), приведенное нами в § 1; затем, так же, как в нашем § 1, он показывал, что точка плоскости, в которую проектируется центр окружности на сфере, не совпадает с центром окружности на плоскости. Приведенное нами доказательство ал-Фергани свойства А) близко к доказательству 5 предложения I книги знаменитого трактата «Конические сечения» античного ученого III века до н. э. Аполлония, в котором находится второе семейство круговых сечений наклонного кругового конуса. Поэтому весьма возможно, что свойство А) стереографической проекции было известно еще Аполлонию. Заметим, что в трактате «О плоских геометрических местах» Аполлоний указывает аналогичное свойство А′) инверсии: плоскими геометрическими местами древние греки называли линии, которые можно начертить линейкой и циркулем, т. е. прямые и окружности.

В трактате «О плоских геометрических местах» Аполлоний говорит, что если «две прямые» (т. е. два прямолинейных отрезка) проведены из одной точки прямой и «содержат данный прямоугольник» (т. е. произведение длин этих отрезков постоянно) и «если конец одной из этих прямых описывает плоское геометрическое место того же или другого рода». Аполлоний говорит также, что тот же факт имеет место, если прямые проведены из разных точек параллельно друг другу или под некоторым углом, т. е. в случае, когда одно «плоское геометрическое место» получается из другого преобразованием, состоящим из инверсии и движения (здесь же Аполлоний рассматривает и гомотетию, и преобразование, состоящее из нее и движения). Во всяком случае указанное предложение «Конических сечений» Аполлония давало грекам полную возможность строго доказать свойство А) стереографической проекции, что, по-видимому, и было сделано, если не во времена Аполлония, то во всяком случае в течение четырех столетий между Аполлонием и Птолемеем. Заслуга ал-Фергани состоит в том, что, располагая только формулировкой свойства А) и не располагая его доказательством, он восстановил это доказательство.

В средние века стереографическая проекция называлась «проекцией астролябии». Термин «стереографическая проекция» был введен в 1831 г. немецким математиком Л. И. Магнусом (1790—1861), которому иногда приписывают открытие этой замечательной проекции.

Этот термин происходит от греческих слов «стереон» — «пространственное тело» (от которого происходит слово «стереометрия») и «графейн» — «чертить, писать», это слово в первом смысле вошло в наше слово «фотография» («черчение светом»), а во втором смысле — в наши слова «география» («описание Земли») и «биография» («описание жизни»).

§ 7. ПРИМЕНЕНИЕ СТЕРЕОГРАФИЧЕСКОЙ ПРОЕКЦИИ К АСТРОНОМИИ И ГЕОГРАФИИ

Познакомимся прежде всего со средневековой астролябией, устройство которой основано на применении стереографической проекции. В настоящее время каждый школьник знаком со школьной астролябией, представляющей собой диск, располагаемый горизонтально на штативе (рис. 14а). Вдоль обода диска нанесены градусные деления. В центре штатива вращается «алидада» — линейка с двумя диоптрами, с помощью которых может быть визировано направление на ту или иную точку. Визируя направления на различные точки, с помощью такой астролябии, можно измерить углы между направлениями на поверхности Земли. В средние века назначение астролябии было совсем другим, о чем свидетельствует ее название, происходящее от греческих слов «астер» — «звезда» и «лабейн» — «схватывать»: астролябия служила для фиксирования координат светил на небесной сфере. Основная часть нынешней школьной астролябии — диск с градусными делениями и алидада с диоптрами представляла собой только одну сторону астролябии. Астролябия подвешивалась за кольцо, алидада (это слово, кстати сказать, искаженное арабское слово ал-идада — «приспособление») направляется на светило и ее острие указывает на градусной шкале обода диска высоту светила в градусах (рис. 14б).

Вторая координата светила определяется с помощью другой стороны астролябии. На этой стороне закреплен неподвижный диск — «тимпан» и установлен вращающийся вокруг его центра резной диск «паук». На тимпане изображены в стереографической проекции окружности небесной сферы, не изменяющиеся при ее видимом

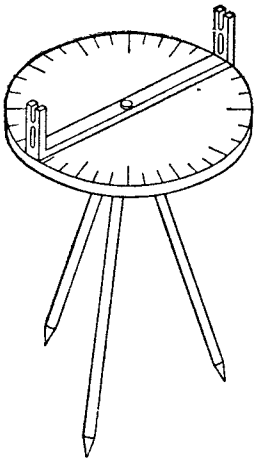


Рис. 14а.

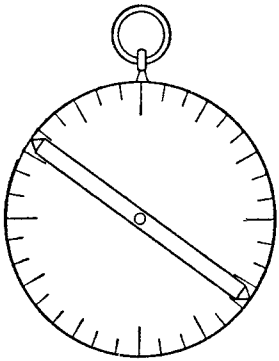


Рис. 14б.

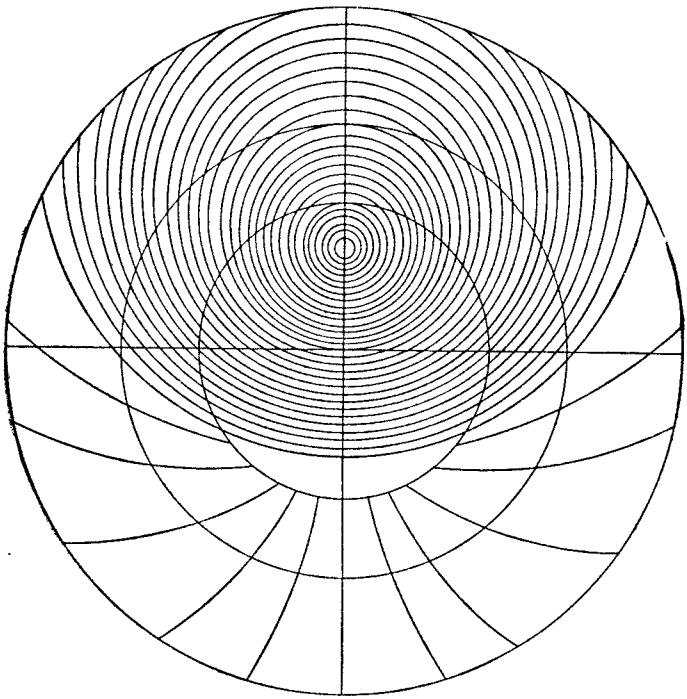


Рис. 15.

суточном движении: небесный экватор — большая окружность, переходящая при этом движении в себя, тропики Рака и Козерога — две параллели небесного экватора, касающиеся эклиптики — большой окружности, по которой совершается видимое годичное движение Солнца (вдоль эклиптики расположены двенадцать созвездий зодиака, Солнце пересекает небесный экватор в дни весеннего и осеннего равноденствий, а наиболее удалено от него в дни летнего и зимнего солнцестояний, когда оно входит в созвездия Рака и Козерога, откуда и происходят названия тропиков; само слово «тропик» происходит от греческого слова «тропе» — «поворот»), горизонт и его параллели — альмукантараты (от арабского слова ал-мукантара—«построенная со сводом»), точка зенита («зенит» — искаженное арабское слово «самт» — «направление», имеется в виду «направление вверх»; слово «самт» превратилось в «зенит» из-за ошибки средневекового переписчика, который в слове zemth прочел m как ni) и вертикалы — большие круги, проходящие через зенит перпендикулярно горизонту. В силу свойства А) все указанные окружности на сфере изображаются на тимпане дугами окружностей или отрезками прямых. За точку S обычно выбирается южный полюс небесной сферы. Поэтому экватор и тропики изображаются на тимпане концентричными окружностями. Тимпан обычно обрезается на окружности, изображающей тропик (рис. 15). Так как в местности с географической широтой φ небесный экватор составляет с горизонтом угол $\frac{\pi}{2} - \varphi$ (на земном экваторе он перпендикулярен горизонту, на полюсах совпадает с ним), то в силу свойства Б) горизонт изображается окружностью, пересекающей изображение экватора в двух диаметрально противоположных точках под углом $\frac{\pi}{2} - \varphi$. Можно показать, что альмукантараты изображаются такими окружностями, которые вместе с окружностью, изображающей горизонт, образуют пучок окружностей, являющихся геометрическими местами точек, у которых отношение расстояний до точки Z, изображающей зенит, и до точки, изображающей диаметрально противоположную точку небесной сферы («надир»), постоянно. Вертикалы изображаются окружностями, проходящими через точку Z перпендикулярно окружности, изображающей горизонт.

Под горизонтом на тимпанах проводятся так называемые часовые линии, служащие для определения времени в «сезонных часах», равных $\frac{1}{12}$ светлого или темного времени суток. Изображения альмукантаратов и вертикалов образуют «паутину», по которой движется «паук». На «пауке» изображены эклиптика и наиболее яркие звезды,

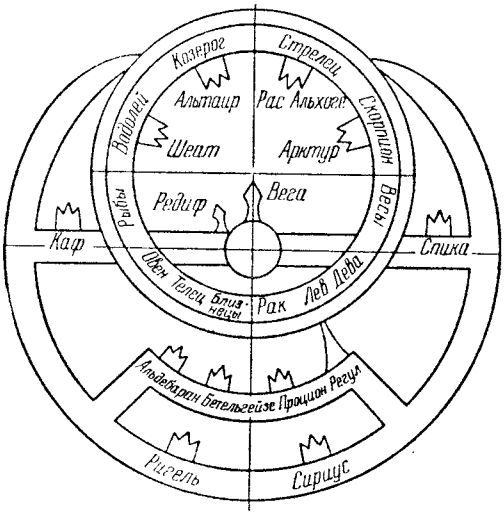


Рис. 16.

вращающиеся при видимом суточном движении небесной сферы. Очевидно, что эклиптика изображается окружностью, касающейся изображений тропиков. На изображении эклиптики указаны двенадцать созвездий зодиака, в каждом из которых Солнце бывает в течение месяца, и дальнейшие подразделения этих участков, позволяющих установить изображение Солнца в любой день года. Звезды изображаются с помощью острий, отходящих от обода пучка или изображения эклиптики (рис. 16).

С помощью астролябии можно определить азимут только такого светила, которое изображено на ее «пауке», т. е. Солнца или одной из звезд, изображенных на нем.

Измерив высоту Солнца или звезды с помощью алидады, переворачивают астролябию вверх тимпаном и поворачивают паук на такой угол, чтобы изображение светила попало бы на альмукантарат с той же высотой.

При этом применяется свойство В) стереографической проекции, в силу которого суточное вращение небесной сферы изображается поворотом «паука». После поворота «паука» мы получаем точное изображение небесной сферы на плоскости в данный момент. Азимут светила в этот момент равен углу между вертикалом, изображение которого проходит через изображение светила, с некоторым начальным вертикалом. Угол поворота «паука» определяет точное время, прошедшее со времени начала дня или ночи, которому соответствует положение «паука», при котором изображение светила находится на изображении горизонта, в астрономических часах; время в «сезонных часах», широко применявшихся в средние века как для определения времени молитв, так и в гражданской жизни, определяется с помощью упомянутых выше часовых линий.

Стереографическая проекция применяется и для проектирования поверхности земного шара на плоскость, т. е. для составления карт. На картах, составленных с помощью этой проекции в силу свойства Б), углы между линиями изображаются в натуральную величину. Такие карты особенно важны для моряков, так как в этом случае угол поворота руля корабля в точности равен углу, измеренному по такой карте. Применению стереографической проекции для составления карт посвящены известные работы великого Леонарда Эйлера (1707—1783), швейцарца, работавшего в Петербурге и Берлине. В этих работах, озаглавленных «О представлении сферической поверхности на плоскости», «О географической проекции сферической поверхности» и «О географической проекции Делиля, применяемой в генеральной карте Российской империи», Эйлер ставит вопрос о наиболее общем преобразовании сферы на плоскость, сохраняющем углы между линиями.

Для этого Эйлер производит стереографическую проекцию сферы на плоскость, а затем, рассматривая плоскость как плоскость комплексного переменного, производит на этой плоскости преобразование с помощью функции $w = f(z)$, обладающей производной $\frac{dw}{dz}$ или с помощью сопряженной с ней функции $w = \overline{f(z)}$: в случае таких функций между дифференциалами dz и dw имеет место соотношение (36), откуда для обоих указанных преобразований вытекает выполнение свойства Б′).

§ 8. ПРИМЕНЕНИЕ СТЕРЕОГРАФИЧЕСКОЙ ПРОЕКЦИИ К ГЕОМЕТРИИ ЛОБАЧЕВСКОГО

Один из наиболее простых способов определения плоскости Лобачевского состоит в следующем: изменим в нашем обычном пространстве закон определения расстояний («метрику») таким образом, что расстояние M_1M_2 между точками $M_1(X_1, Y_1, Z_1)$ и $M_2(X_2, Y_2, Z_2)$ будет выражаться не формулой (8), а формулой

$$d = \sqrt{(X_2 - X_1)^2 + (Y_2 - Y_1)^2 - (Z_2 - Z_1)^2}, \tag{47}$$

а угол φ между векторами $\overrightarrow{OM_1}$ и $\overrightarrow{OM_2}$ — не формулой (9), а формулой

$$\cos\varphi = \frac{X_1X_2 + Y_1Y_2 - Z_1Z_2}{\sqrt{X_1^2 + Y_1^2 - Z_1^2}\,\sqrt{X_2^2 + Y_2^2 - Z_2^2}}. \tag{48}$$

Такое пространство называется *псевдоевклидовым пространством*. В отличие от обычного евклидова пространства в псевдоевклидовом пространстве имеются отрезки вещественной, нулевой и чисто мнимой длины, прямые трех типов — с вещественной, нулевой («изотропные прямые») и чисто мнимой длиной отрезков, плоскости трех типов — с евклидовой, псевдоевклидовой и промежуточной между ними «изотропной» геометрией и сферы трех типов — вещественного, чисто мнимого и нулевого радиуса. Уравнения этих трех типов сфер с центром в начале координат имеют, соответственно, вид

$$X^2 + Y^2 - Z^2 = R^2, \tag{49}$$

$$X^2 + Y^2 - Z^2 = -R^2 \tag{50}$$

и

$$X^2 + Y^2 - Z^2 = 0. \tag{51}$$

Поэтому сферы вещественного радиуса в псевдоевклидовом пространстве имеют вид однополостного гиперболоида (рис. 17, *а*); сферы чисто мнимого радиуса имеют вид двуполостного гиперболоида (рис. 17, *б*), а сферы нулевого радиуса имеют вид конусов

(рис. 17, *в*). Конус (51) называется асимптотическим конусом сфер (49) и (50).

Плоскость Лобачевского можно определить как сферу мнимого радиуса в псевдоевклидовом пространстве с отождествленными

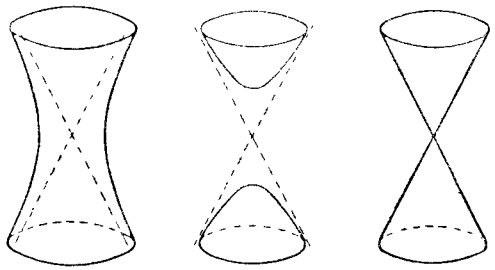


Рис. 17.

диаметрально противоположными точками (или как одну из полостей этой сферы). Роль прямых линий на плоскости Лобачевского играют диаметральные сечения сферы, аналогичные большим окружностям обычной сферы. Нетрудно проверить, что касательные плоскости к этой сфере — евклидовы, откуда следует, что в малых участках такой сферы, как и в малых участках обычной сферы, геометрия мало отличается от евклидовой (напротив, касательные плоскости к сфере вещественного радиуса в псевдоевклидовом пространстве псевдоевклидовы, а касательные плоскости к сфере нулевого радиуса «изотропны»). С другой стороны, если мы спроектируем сферу мнимого радиуса из ее центра на касательную плоскость (рис. 18, *а*), то вся плоскость Лобачевского спроектируется в виде внутренней области круга (являющегося пересечением плоскости проекции с асимптотическим конусом сферы), а диаметральные сечения сферы, т. е. прямые плоскости Лобачевского, изобразятся хордами этого круга (эта проекция называется *интерпретацией Бельтрами — Клейна* плоскости Лобачевского). На рис. 18, *б* наглядно видно, что в этой проекции через точку A можно провести более одной хорды, не пересекающей данной хорды a, что соответствует аксиоме Лобачевского, в силу которой через точку плоскости можно провести более одной прямой в этой плоскости, не пересекающей данной прямой этой плоскости; с другой стороны, можно

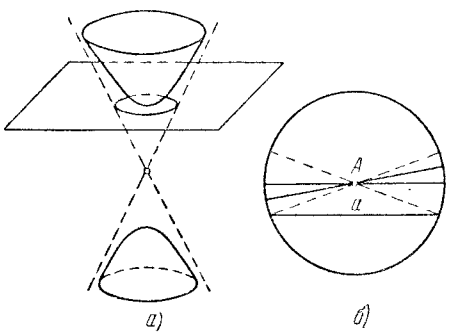


Рис. 18.

проверить, что в этой плоскости выполняются все аксиомы геометрии Евклида, за исключением аксиомы параллельности, в силу которой через точку плоскости нельзя провести более одной прямой, не пересекающей данной прямой.

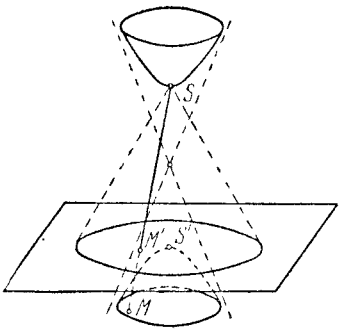


Рис. 19.

В псевдоевклидовом пространстве, так же как в евклидовом, можно определить стереографическую проекцию сферы как вещественного, так и мнимого радиуса на плоскость. В частности, стереографическая проекция сферы радиуса i с уравнением

$$X^2 + Y^2 - Z^2 = -1 \tag{52}$$

из точки $S(0, 0, 1)$ на плоскость $Z = -1$ (рис. 19) выражается формулами, аналогичными формулам (12),

$$\left.\begin{aligned} X &= \frac{4x}{4 - x^2 - y^2}, \\ Y &= \frac{4y}{4 - x^2 - y^2}, \\ Z &= \frac{x^2 + y^2 + 4}{x^2 + y^2 - 4}. \end{aligned}\right\} \tag{53}$$

С помощью этих формул так же, как в § 3, доказываются свойства А), Б) и В) стереографической проекции сферы мнимого радиуса на плоскости. При этом вся нижняя полость сферы мнимого радиуса спроектируется в виде внутренней области круга

$$x^2 + y^2 = 4, \tag{54}$$

высекаемого из плоскости конусом, полученным из асимптотического конуса сферы мнимого радиуса переносом его вершины из

центра сферы в точку S, а верхняя полость этой сферы изобразится внешней областью этого круга. Если рассматривать плоскость как плоскость комплексного переменного, то окружность (54) совпадет с окружностью (27); совершенно так же, как в § 4, можно показать, что диаметрально противоположные точки сферы мнимого радиуса изображаются на плоскости точками, находящимися в инверсии относительно этой окружности, откуда следует, что все диаметральные сечения сферы, т. е. прямые плоскости Лобачевского, изображаются окружностями, переходящими в себя при этой инверсии, т. е. окружностями ортогональными окружности (54). Мы получили так называемую *интерпретацию Пуанкаре* плоскости Лобачевского.

Как известно, сумма углов треугольника плоскости Лобачевского всегда меньше π (можно доказать, что площадь треугольника плоскости Лобачевского равна произведению недостатка его суммы

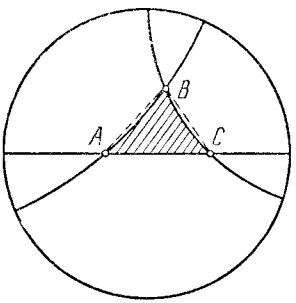


Рис. 20.

углов до π на квадрат модуля радиуса соответственной сферы мнимого радиуса). Теперь так же, как в § 4, мы можем убедиться в этом совершенно наглядно: изобразим в интерпретации Пуанкаре треугольник ABC (на рис. 20 сторона AB этого треугольника изображается отрезком диаметра окружности (54), а стороны AB и BC — дугами окружностей ортогональных этой окружности). Тогда в силу свойства Б) углы треугольника изображаются на плоскости в натуральную величину. Соединим теперь вершины треугольника на плоскости прямыми линиями, сумма углов полученного прямолинейного треугольника на плоскости равна π и на рис. 20 наглядно видно, что сумма углов треугольника ABC плоскости Лобачевского меньше суммы углов построенного нами прямолинейного треугольника, т. е. меньше π.

Так как через точку плоскости Лобачевского можно провести более одной прямой, не пересекающей данной прямой, то среди множества этих прямых имеются две граничные прямые, отделяющие прямые, проходящие через данную точку и пересекающие данную прямую, от прямых, проходящих через данную точку и не пересекающих данной прямой. Эти две прямые называются прямыми, *параллельными* данной прямой; остальные прямые, не пересекающие данной прямой, называются прямыми, *расходящимися* с

данной прямой. Можно показать, что в нашей стереографической проекции *параллельные прямые изображаются дугами окружностей, касающихся друг друга в точке, расположенной на окружности* (54).

На плоскости Лобачевского имеются три класса замечательных кривых: окружности, эквидистанты, орициклы.

1) *Окружность*, как и на обычной плоскости, определяется как геометрическое место точек плоскости, равноудаленных от одной точки. Как и на обычной плоскости, окружности плоскости Лобачевского можно определить и как кривые, в каждой своей точке пересекающие под прямым углом прямые некоторого пучка прямых, пересекающихся в одной точке.

2) *Эквидистантой* называется кривая, равноотстоящая от одной заданной прямой, называемой базой эквидистанты. На плоскости Лобачевского, в отличие от обычной плоскости, такие геометрические места являются не парами прямых, а кривыми, состоящими

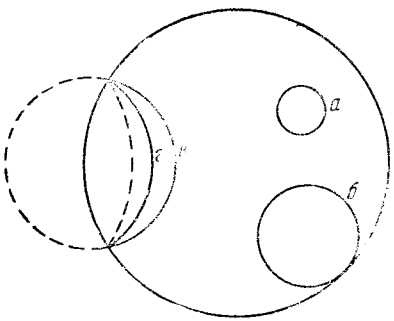


Рис. 21.

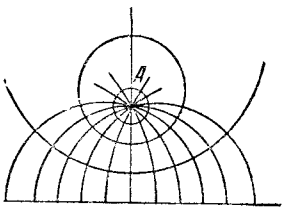


Рис. 22.

из двух ветвей. Эквидистанту можно также определить как кривую, в каждой своей точке пересекающую под прямым углом прямые, перпендикулярные к одной заданной прямой — к базе эквидистанты (слово «эквидистанта» означает «равноотстоящая»).

3) *Орициклом* называется кривая, которая в каждой своей точке пересекает под прямым углом прямые, параллельные между собой (слово «орицикл» означает «предельный круг»).

Можно показать, что в нашей стереографической проекции окружности плоскости Лобачевского изображаются окружностями, находящимися во внутренней области круга (54) (рис. 21, *а*). Орициклы изображаются окружностями, касающимися окружности (54) (рис. 21, *б*) в точке, через которую проходят дуги окружностей, изображающие параллельные прямые, перпендикулярные орициклу. Эквидистанты изображаются окружностями, пересекающими окружность (54) в двух точках (рис. 21, *в*), именно тех самых двух точках, в которых окружность, изображающая базу эквидистанты (рис. 21, *г*), пересекает окружность (54). (При отождествлении диаметрально противоположных точек сферы мнимого радиуса каждая точка плоскости отождествляется с точкой, в которую она перехо-

дит при инверсии относительно окружности (54), и часть окружности, изображающей эквидистанту, находящуюся вне круга (54), можно заменить дугой во внутренней области этого круга, в которую рассматриваемая дуга переходит при указанной инверсии.) То, что все эти кривые изображаются в стереографической проекции окружностями, объясняется тем, что на сфере мнимого радиуса эти кривые изображаются плоскими сечениями: окружности — сечениями евклидовыми плоскостями псевдоевклидова пространства, эквидистанты — сечениями псевдоевклидовыми плоскостями этого пространства, а орициклы — сечениями «изотропными» плоскостями.

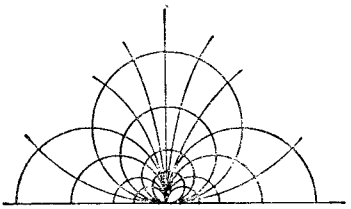


Рис. 23.

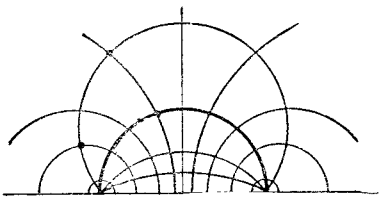


Рис. 24.

Заметим, что Пуанкаре предложил свою интерпретацию в другой форме, где роль круга (54) играет верхняя полуплоскость плоскости комплексного переменного, роль окружности (54) — вещественная ось этой плоскости. В этой интерпретации прямые плоскости Лобачевского изображаются полуокружностями с центрами на вещественной оси, а окружности (рис. 22), орициклы (рис. 23) и эквидистанты (рис. 24) изображаются окружностями, не пересекающимися с вещественной осью, касающимися этой оси и пересекающими ее в двух точках не под прямым углом (если окружность пересекает вещественную ось под прямым углом, то она изображает прямую). Движения плоскости Лобачевского изображаются в этом случае дробно-линейными преобразованиями (41), где все четыре числа a, b, c, d вещественны.

ЛИТЕРАТУРА

Стереографическая проекция излагается во всех курсах теории функций комплексного переменного. О геометрических вопросах стереографической проекции и ее обобщений см. статью и книги:

Б. А. Розенфельд, Аксиомы и основные понятия геометрии, Энциклопедия элементарной математики, кн. 4, М., 1963, стр. 23—26.

Б. А. Розенфельд, Многомерные пространства, М., 1966.

Б. А. Розенфельд, Неевклидовы пространства, М., 1969.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение 3
§ 1. Определение и основные свойства стереографической проекции 7
§ 2. Стереографическая проекция и инверсия 15
§ 3. Доказательство свойств стереографической проекции с помощью координат 20
§ 4. Сферическая метрика на плоскости. Применение комплексных чисел 24
§ 5. Изображение вращений сферы на плоскости 29
§ 6. История стереографической проекции 32
§ 7. Применение стереографической проекции к астрономии и географии 35
§ 8. Применение стереографической проекции к геометрии Лобачевского 40
Литература 46

Борис Абрамович Розенфельд
и *Надежда Дмитриевна Сергеева*

Стереографическая проекция

(Серия «Популярные лекции по математике»)

М., 1973 г., 48 стр. с илл.

Редактор *А. Ф. Лапко*
Техн. редактор *Г. А. Полонская*
Корректор *Т. С. Вайсберг*

Сдано в набор 14/V 1973 г.
Подписано к печати 15/X 1973 г.
Бумага 84×108$^1/_{32}$. Тип. № 2. Физ. печ. л. 1,5.
Условн. печ. л. 2,52. Уч.-изд. л. 2,03.
Тираж 50000 экз. Цена книги 6 коп.
Заказ № 637

Издательство «Наука»
Главная редакция
физико-математической литературы
117071, Москва, В-71, Ленинский пр., 15

Ордена Трудового Красного Знамени
Ленинградская типография № 2
имени Евгении Соколовой
Союзполиграфпрома при Государственном
комитете Совета Министров СССР
по делам издательств, полиграфии
и книжной торговли
198052, Ленинград, Л-52,
Измайловский проспект, 29